Unendliche Darstellungen der Lorentz-Transformation und das Massenproblem

Von Walter Wessel*

(Z. Naturforschg. **3a**. 559—564 [1948]; eingegangen am 7. September 1948)

In einer Schriftenfolge zum 75. Geburtstage A. Sommerfelds erlaubte sich der Verfasser, einen damals noch sehr unsicheren und im Ergebnis selbst widerspruchsvollen Beitrag „Über Spin und Strahlungskraft" vorzulegen, in dem versucht wurde, die Reaktionskraft der Strahlung auf ein bewegtes, geladenes Teilchen auch in der Quantentheorie rein mechanisch zu behandeln. Der Widerspruch ließ sich später beheben[1] im Rahmen einer rein klassischen Theorie, in der das System der Bewegungsgleichungen auf Poisson-Klammern gebracht und zu dem Zwecke ein magnetisches Moment der Teilchen als selbständige Variable eingeführt wurde[2]. Dieses Programm ließ sich auch quantentheoretisch durchführen[3] und hat neuerdings zu einer verheißungsvollen Anwendung auf das Problem der Massenquantelung geführt[4]. Verf. ist dankbar für die Gelegenheit, eine Zusammenfassung dieser letzten Arbeiten seinem alten Lehrer zum 80. Geburtstage widmen zu dürfen.

Die Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung setzt bekanntlich in der feldmäßigen Behandlung eine Quantelung des Strahlungskontinuums voraus. Diese führt zu Divergenzen, die nicht durch die Endlichkeit der Lichtquanten behoben werden, sondern ihren Sitz in der Endlichkeit der *Teilchen* und ihrer *Selbstenergie* haben. Das Problem der Quantelung des Kontinuums mit Materie ist dadurch mit dem *Massenproblem* verknüpft. Versucht man diese Dinge unter Vermeidung der Feldquantelung rein mechanisch zu behandeln, so steht man vor zwei Aufgaben: erstens, in die Eigenwertspektren die nötige *Kontinuität* hineinzubringen, und zweitens, zu zeigen, wie trotzdem die Eigenwerte so weitgehend *scharf* herauskommen. Die erste Frage löst sich in unserer Theorie, wie wir im folgenden zeigen, ganz von selbst, wenn wir bei der Quantisierung von der selbstverständlichen *Realität* aller Eigenwerte ausgehen. Die zweite hat für Teilchen mit bewegtem Schwerpunkt noch mathematische Schwierigkeiten. Nun hat man nach der Entdeckung so vieler instabiler Elementarpartikel alle Ursache, mit Bopp[5] mindestens Gruppen von ihnen als angeregte Zustände einer einzigen aufzufassen. Damit rücken auch die *Ruhmassen* unter die zu quantelnden Eigenwerte. In der Tat haben auch unsere Teilchen, wie bei Bopp und bei dem in dieser Hinsicht sehr verwandten Partikelmodell von Hönl[6], eine Art von kinetischer Energie der Bewegung *innerer* Variablen auch im Ruhsystem. Diese Energie hat neben einem *Kontinuum* tatsächlich *diskrete* Eigenwerte mit einem oberen Häufungspunkt. Ein Kontinuum, d. h. die Möglichkeit von Teilchen beliebiger Masse oberhalb einer hinlänglich großen, hat wohl nichts Unwahrscheinliches und ist übrigens auch schon vorgeschlagen worden[7].

Während die Energiequantelung als solche eindeutig herauskommt, ist die Quantelung zweier Parameter, die die Energie in ähnlicher Weise mitbestimmen wie der Drehimpuls die Energie von Teilchen mit bewegtem Schwerpunkt, einstweilen nicht möglich wegen der Beschränkung auf das Ruhsystem. Die Behandlung bewegter Teilchen setzt eine Kenntnis unendlicher Darstellungen der Lorentz-Transformation voraus, die noch nicht in dem erforderlichen Umfange vorliegt. Wir können zeigen, daß unser Massenspek-

* Z. Zt. in USA.

[1] W. Wessel, Z. Naturforschg. **1**, 622 [1946].

[2] Dieser Gesichtspunkt ist neuerdings auch in der Feldtheorie durch mehrere Autoren herausgearbeitet worden, vgl. besonders J. Schwinger, Physic. Rev. **73**, 416 [1948]. Ganz kürzlich ist auch experimentell eine Anomalie des g-Wertes gebundener Elektronen durch P. Kusch u. H. M. Foley, Physic. Rev. **74**, 250 [1948], nachgewiesen worden.

[3] W. Wessel, im Druck bei der Physic. Rev.

[4] Erscheint voraussichtlich ebenfalls in der Physic. Review.

[5] F. Bopp, Z. Naturforschg. **1**, 196 [1946].

[6] H. Hönl in zahlreichen Arbeiten, zuletzt Z. Naturforschg. **2a**, 537 [1947].

[7] D. Blokhinzew, Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. physique **11**, 72 [1947].

trum die zur Zeit bestbelegten *Mesonenmassen* in ihrer allgemeinen Verteilung und bei geeigneter, halbempirischer Wahl der unbestimmten Parameter auch quantitativ gut wiedergibt. Es muß aber dabei die Existenz einer bestimmten Lorentz-Darstellung vorausgesetzt werden, die bisher noch nicht bewiesen ist. Neuartig sind ferner eine Variante des Korrespondenzprinzips und der WBK-Methode.

Das Teilchen werde, wie früher[1], beschrieben durch seinen Impuls p_k, seine Vierergeschwindigkeit u^k und seinen Momenten-Sechservektor M_{ik} ($i,k = 1..4$; die Metrik ist $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, g_{44} = -1$). u^k wird aufgefaßt als j^k/l, wobei j^k ein zeitartiger Vierervektor ist, dessen vier Komponenten auf drei unabhängige reduziert werden dadurch, daß sein Betrag l durch die Invarianten I und J des Momententensors in der Form

$$l = \sqrt{I^2 + J^2} \tag{1}$$

ausdrückbar sein soll. Schließlich wird ein raumartiger Einheits-Vierervektor U^i der „zugeordneten“ Geschwindigkeit gebraucht, der mit Hilfe eines Vektors k^i als k^i/l mit derselben Invarianten l wie j^k ausdrückbar ist. Er ist durch j_r und M^{rk} mitbestimmt durch die Forderung, daß er parallel zu $j_r M^{rk}$ sein soll. Die Komponenten k_1, k_2, k_3 spielen eine ähnliche Rolle wie der mechanische Spin bei Dirac.

Die Hamiltonsche Funktion ist für frei bewegte Teilchen durch den Term $c\,p^4$ in

$$u_k p^k = -m_0 c \tag{2}$$

gegeben, wo m_0 als reine Konstante (unabhängig von I und J) betrachtet wird. Der Grund dafür war[1], daß man damit in den Bewegungsgleichungen einen der klassischen Strahlungskraft sehr ähnlichen Ausdruck erhält. Wie weit dieser Ausdruck richtig ist, soll hier nicht weiter theoretisch untersucht werden, sondern ein Ausgangspunkt dieser Arbeit war gerade, ihn unmittelbar an der Erfahrung zu prüfen. Wir übernehmen auch die früheren Poisson-Klammern (P.-K.) als Vertauschungsrelationen (V.-R.) und eliminieren nur alle Dimensionskonstanten, indem wir die früheren $I, J, j^k, k^i, \mathfrak{M}_i, \mathfrak{P}_k$ in Vielfachen dimensionsloser $\mathrm{I}, \mathrm{K}, \iota^k, \varkappa^i, \mathrm{M}_i, \Pi_k$ ausgedrückt denken. Gl. (2) lautet dann, wenn man mit l nach (1) durchmultipliziert,

$$\iota_k p^k = -m_0 c \sqrt{\mathrm{I}^2 + \mathrm{K}^2}. \tag{3}$$

Die Frage einer rationalen Darstellbarkeit der rechten Seite und die Auflösung der Gleichung nach p^4 bei nicht damit vertauschbarem ι^4 findet man in der ausführlichen Mitteilung erörtert. Für die nachher folgende, im wesentlichen halbklassische Behandlung braucht man darauf nicht zu achten. Was zunächst interessiert und unmittelbar die zuerst aufgeworfene Frage beantwortet, ist die Darstellbarkeit der ι_k und I, K durch *Matrizen, die den früheren P.-K. als V.-R. genügen.* Die bloße Forderung, daß diese Matrizen ***hermitesch*** sein sollen, ergibt nämlich bereits ***kontinuierliche Eigenwertspektren*** für K und für ι_1, ι_2 und ι_3. Es genüge, die Verhältnisse für K zu zeigen. Die nötigen V.-R. sind nach[1] (4,13) und (4,16)

$$\begin{aligned} [\mathrm{K}\,\iota^4] &= i\,\varkappa^4, \\ [\iota^4 \varkappa^4] &= i\,\mathrm{K}, \\ [\varkappa^4\,\mathrm{K}] &= -i\,\iota^4. \end{aligned} \tag{4}$$

Es habe nun etwa K diskrete Eigenwerte K′, K″ ... Die erste und letzte der Relationen lauten dann in K-Darstellung (mit Weglassung des Index' 4)

$$\begin{aligned} (\mathrm{K}' - \mathrm{K}'')\,\iota_{\mathrm{K}'\mathrm{K}''} &= i\,\varkappa_{\mathrm{K}'\mathrm{K}''}, \\ (\mathrm{K}'' - \mathrm{K}')\,\varkappa_{\mathrm{K}'\mathrm{K}''} &= -i\,\iota_{\mathrm{K}'\mathrm{K}''}, \end{aligned} \tag{5}$$

und Multiplikation beider Gleichungen ergibt sofort

$$(\mathrm{K}' - \mathrm{K}'')^2 = -1, \tag{6}$$

d. h. die Eigenwerte können nicht reell sein. Dem Schlusse von (5) auf (6) entgeht man nur, wenn man annimmt, daß die Eigenwerte von K ***kontinuierlich*** sind, denn dann ist die Ablösung des Klammerfaktors nicht möglich. In der Tat läßt sich eine vollständige hermitesche Darstellung des Systems der P.-K. nach[1] geben, wenn man schon die Ausgangsgleichungen (4,10)[1] als V.-R. versteht ($\Gamma \sim i$):

$$[\psi_\mu \chi^\nu] = \delta^\nu_\mu, \qquad [\psi_{\dot\mu} \chi^{\dot\nu}] = -\delta^{\dot\nu}_{\dot\mu}. \tag{7}$$

Sie sind in dieser Form vereinbar, denn die $\Psi_{\dot\mu}$, $\chi^{\dot\nu}$ haben als Matrizen die Natur von $\psi_\mu{}^\dagger$ und $\chi^{\nu\dagger}$ ($\dagger$ = transponiert und konjugiert), und damit folgt das Vorzeichen in (7) aus der bekannten Regel $(a\,b)^\dagger = b^\dagger a^\dagger$.

Die Ausrechnung und Reduktion dieser Darstellungen bildet den Inhalt von[3]. Die für das Folgende wichtigsten Ergebnisse sind:

1. Alle Matrizen sind *unendlich*. Für die kontinuierlichen versteht sich das von selbst. In der Tat lassen sich aus den Momentenmatrizen (M_{ik}) *unitäre Darstellungen der Lorentz-Transformation* aufbauen, und es ist bekannt, daß diese Darstellungen unendlich sind[8].

2. Der Spektralcharakter ist symmetrisch geteilt, und zwar sind

$$\begin{array}{ll} \mathrm{K}\,;\, \iota_1, \iota_2, \iota_3\,;\, \varkappa_4\,;\, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 & \text{kontinuierlich,} \\ \mathrm{I}\,;\, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3\,;\, \iota_4\,;\, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3 & \text{diskontinuierlich.} \end{array} \tag{8}$$

Es ist offenbar sehr befriedigend, daß die geschwindigkeitsbestimmenden ι_k, $k=1,2,3$ kontinuierlich, die spinbestimmenden $\varkappa_k$ und M_k, $k=1,2,3$ dagegen diskontinuierlich herauskommen. Die M_k (magnetischen Momentkomponenten) sind reduzibel nach den Darstellungen der Drehungsgruppe. Die eigentümliche Erscheinung, daß die Π_k' (elektrische Komponenten) abweichenden Spektralcharakter haben, obwohl sie mit den M_k einen Sechservektor bilden, wird dadurch möglich, daß ein M und ein Π durch eine Drehung überhaupt nicht, durch eine Lorentz-Transformation niemals vollständig ineinander übergeführt werden. Entsprechendes gilt für die ι_k und $\varkappa_k$, $k=1\,..\,4$.

3. Die Eigenwerte von I und ι^4 lassen sich durch zwei ganze Zahlen z_1 und z_2, positiv oder Null, in der Form

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}(z_1 - z_2)\,, \qquad \iota_4 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) + 1 \tag{9}$$

darstellen. Mit der Invarianten I, die das Zentrum im gruppentheoretischen Sinne bildet, wird die gesamte Darstellung entweder ganz oder halbganz. Man kann, indem man nach M_3, $\varkappa_3$ und ι^4 numeriert, alle übrigen Elemente als Übermatrizen bilden und, dank der positiven Definitheit von ι^4, sogar ganz einfach hinschreiben.

Damit hat man also kontinuierliche Eigenwerte die Fülle, und es ist nur die Frage, wie man sie wieder los wird. Dazu ist zunächst hervorzuheben, daß eine Funktion einer Matrix mit kontinuierlichem Spektrum nicht auch eines zu haben braucht. Ein auch sonst aufschlußreiches Beispiel ist die Impulsmatrix eines freien Teilchens, das zwischen zwei festen Wänden hin und her reflektiert wird. Ihr Spektrum muß aus Gründen der Unbestimmtheitsrelation kontinuierlich sein, dagegen ist ihr Quadrat als Gesamtenergie natürlich gequantelt. Die matrizentechnische Behandlung dieser Probleme ist also heikel, und es ist geraten, die Sache zunächst am Bilde der *zugeordneten klassischen Bewegung* zu studieren. Man wird erwarten, diskrete Eigenwerte zu finden, wenn die klassische Bewegung *periodisch* ist.

Die Verhältnisse werden schon für gleichförmige Translation etwas unübersichtlich, und wir beschränken uns daher auf das *Ruhsystem* $p_1 = p_2 = p_3 = 0$. Die Hamiltonsche Funktion $c\,p^4$ sei auch durch ein dimensionsloses H als $m_0 c^2 \mathrm{H}$ ausgedrückt. Nach (3) ist dann (beachte $\iota_4 = -\iota^4$; der Index 4 an ι^4 und $\varkappa^4$ möge weiterhin fortbleiben):

$$\mathrm{H} = \frac{\sqrt{\mathrm{I}^2 + \mathrm{K}^2}}{\iota}\,. \tag{10}$$

Die konstanten bzw. Eigenwerte von H mögen η heißen; die Massen sind dann

$$m = \eta\, m_0\,. \tag{11}$$

Wir fassen nun wieder die V.-R. (4) als P.-K. auf und bilden die zeitliche Ableitung z. B. von ι als $(\mathrm{H}\iota) = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{K}}(\mathrm{K}\iota)$. Eine Wirkungskonstante, die zusammen mit $m_0 c^2$ die Zeitskala bestimmen würde, sei wieder weggelassen. Die Bewegungsgleichungen lauten dann, wenn man nach der Differentiation $\mathrm{H} = \eta$ setzt:

$$\dot{\mathrm{K}} = \frac{\eta\varkappa}{\iota}\,, \qquad \dot{\iota} = \frac{\mathrm{K}\varkappa}{\eta\,\iota^2}\,, \qquad \dot{\varkappa} = \frac{\mathrm{K}}{\eta\,\iota}(1-\eta^2)\,. \tag{12}$$

Sie haben, wie man auch aus (4) schließen kann, das Integral

$$\varkappa^2 + \mathrm{K}^2 - \iota^2 = \varrho^2 \tag{13}$$

nicht notwendig positiv. Mit η und ϱ hat man bereits alle Integrale von (12) bis auf die Zeitkon-

[8] Sie sind in den letzten Jahren ausführlich untersucht worden durch V. Bargmann, Ann. Math. (2) **48**, 568 [1947]; Harish-Chandra, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **189**, 372 [1947], und I. Gelfand u. M. Neumark, Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. physique **10**, 93 [1946]. Unsere aus (7) hergeleiteten Darstellungen haben Vertreter in allen Klassen Bargmanns (unser Fall $\mathrm{I}=0$ gehört seiner Klasse C_q^0, unser Fall $\mathrm{I} \neq 0$ seinem $C_{k,r}$ an). Es ist aber wahrscheinlich und für das Folgende wesentlich, vorauszusetzen, daß unsere Darstellungen nicht alle Möglichkeiten erschöpfen und daß insbesondere noch mehr ι_k- und $\varkappa_k$-Darstellungen möglich sind (die in die Darstellungen der Lorentz-Transformation selbst nicht eingehen und auch nicht durch V.-R. daraus abzuleiten sind).

stante. I ist als Zentrum natürlich auch konstant. Durch Elimination von ι und $\varkappa$ vermittels (10) und (13) läßt sich z. B. die Gleichung für $\dot{K}$ schreiben:

$$\dot{K}^2 - \eta^4 \frac{\varrho^2 + I^2}{I^2 + K^2} = \eta^2 (1 - \eta^2). \tag{14}$$

Sie hat die Form des Energiesatzes für ein Teilchen mit einer Koordinate K, das sich in einem Potentialfelde bewegt. Für $I^2 + \varrho^2 \lesssim 0$ hat man einen Potential-*Berg* und nur aperiodische Bewegung, für $I^2 + \varrho^2 > 0$ dagegen eine Potential-*Mulde* und

$$\begin{matrix}\text{periodische}\\ \text{aperiodische}\end{matrix}\ \text{Bewegung für}\ \begin{matrix}\eta > 1\\ \eta < 1.\end{matrix} \tag{15}$$

Es gibt also klassisch tatsächlich periodische Bewegungstypen, die dann auch für $\varkappa$ und ι gelten, aber sie liegen energetisch *über* den aperiodischen.

Dieser Sachverhalt kehrt sich gerade um, wenn man zur quantentheoretischen Behandlung übergeht. Wir setzen dazu mit Hinblick auf (13)

$$\varkappa = \sin \Phi \sqrt{\varrho^2 + \iota^2}, \quad K = \cos \Phi \sqrt{\varrho^2 + \iota^2}. \tag{16}$$

Der Winkel Φ ist dann zu ι kanonisch konjugiert, $(\iota\Phi) = 1$, wie man leicht nachrechnet. Einführung von K in (10) liefert die Hamiltonsche Funktion in der Form

$$H = \frac{\sqrt{I^2 + (\varrho^2 + \iota^2)\cos^2 \Phi}}{\iota}; \tag{17}$$

daraus folgt[9] für den kanonischen Impuls ι:

$$\iota^2 = \frac{I^2 + \varrho^2 \cos^2 \Phi}{\eta^2 - \cos^2 \Phi}, \tag{18}$$

d. i. mit $\iota = \partial S/\partial \Phi$ die Hamiltonsche Differentialgleichung. Es ist nun trotz der diskontinuierlichen Eigenwerte von ι *bei genügend großem, positivem* ϱ^2 näherungsweise, nämlich bis auf Glieder mit ϱ^{-2}, möglich, auch bei kleinem ι die Formeln (16) als eine infinitesimale Darstellung der V.-R. (4) aufzufassen, indem man

$$\iota \to i \frac{d}{d\Phi} \tag{19}$$

setzt. Aus (18) ergibt sich dann die Schrödinger-Gleichung des Problems:

$$\frac{d^2 \psi}{d\Phi^2} = -\frac{I^2 + \varrho^2 \cos^2 \Phi}{\eta^2 - \cos^2 \Phi}\psi. \tag{20}$$

[9] Zur Frage des Quadrierens siehe die ausführliche Darstellung.

Sie hat offenbar — wir kommen noch darauf zurück — wegen der Singularität rechterhand bei $\cos \Phi = \pm \eta$

$$\begin{matrix}\text{kontinuierliche}\\ \text{diskontinuierliche}\end{matrix}\ \text{Eigenwerte für}\ \begin{matrix}\eta > 1\\ \eta < 1,\end{matrix} \tag{21}$$

d. h. den aperiodischen Bewegungen entsprechen diskrete Eigenwerte und umgekehrt!

Korrespondenzmäßig läßt sich das verstehen — wenigstens was den ersten Teil der Alternative betrifft —, wenn man bedenkt, daß auch ein „Teilchen“, das, aus dem Unendlichen kommend und dahin gehend, eine „Potentialmulde“ im Sinne der Gl. (14) durchläuft, ein wohldefiniertes *weiches* Fourier-Spektrum hat, wenn man von der überlagerten gleichförmigen Bewegung absieht bzw. die erste, oder (aus Konvergenzgründen) besser die zweite Ableitung betrachtet. Die Analyse ist schwer in allgemeiner Form zu geben, weil die zweite Ableitung gegen unwesentliche kinematische Feinheiten empfindlich ist; es läßt sich aber durch Ungleichungen ein Fall abgrenzen, der die Bewegung nicht wesentlich spezialisiert, jedoch $\ddot{\iota}$ (natürlich nicht $\ddot{K}$) ständig positiv macht. Das Fourier-Spektrum dieser Beschleunigung ist vergleichbar dem Spektrum eines „Impulses“ im Sinne der Echolot-Meßtechnik bzw., optisch gesprochen, eines *Spaltes*. Der Impulslänge bzw. Spaltbreite, die die Beugungsfransen bestimmt, entspricht mechanisch, wie wohl auch ohne Wiedergabe der ausführlichen Rechnung einleuchtet, das *Wirkungsintegral*, erstreckt über die gesamte aperiodische Bewegung. Diese spielt in der Φ-Skala, wie sich aus den mit (17) zu bildenden kanonischen Gleichungen ergibt, zwischen $\cos \Phi = -\eta$ und $\cos \Phi = +\eta$. Das zwischen diesen Grenzen erstreckte Wirkungsintegral ist aber im Hinblick auf (21) *diskontinuierlich* zu quanteln.

Die Korrespondenz der *periodischen* Bewegung und der *kontinuierlichen* Eigenwertfolge für $\eta > 1$ läßt sich nicht so leicht verstehen, weil Intensität im quantentheoretischen Falle eine Sache der Übergangswahrscheinlichkeit ist. Diese im Ruhsystem zu betrachten, dürfte zwecklos sein, weil die Energiedifferenz wohl immer mindestens teilweise als *kinetische* Energie auftritt. Wir versuchen daher auch keine *Lebensdauern* zu berechnen. Die Korrespondenz läßt immerhin vermuten, daß das quantentheoretische Kontinuum nicht ganz strukturlos ist, vielleicht im Sinne des

Auftretens von sehr kurzlebigen Teilchen mit ungenau definierter Masse.

Die bisherige halbklassische Methode läßt sich leider nicht auf die Bestimmung von I und ϱ ausdehnen, weil diese Größen erst im Rahmen einer Darstellung *aller* 16 Partikelmatrizen (8) festgelegt werden. Solche Darstellungen sind für den hier betrachteten Fall $I^2 + \varrho^2 > 0$ („Potentialmulde") noch nicht bekannt; die vom Verf. berechneten[3] entsprechen vielmehr alle dem Falle $I^2 + \varrho^2 < 0$ („Potentialberg"). Man erkennt das, wenn man sich an Hand der V.-R. (4) klarmacht, daß immer, wenn ι einen kleinsten Wert ι_0 hat,

$$\varrho^2 = \iota_0 (1 - \iota_0) \tag{22}$$

ist. Das ist nach (9) der Fall, und damit ist immer $I^2 + \varrho^2 = -z_1 z_2 - {}^1/_2 (z_1 + z_2) \leqq 0$. Dieser Fall ist durchaus nicht uninteressant, denn nach dem Prinzip der Kreuzkorrespondenz ist ja zu erwarten, daß diese stets aperiodischen klassischen Bewegungstypen *auch* zu diskreten Eigenwerten führen; doch bilden in diesem Falle die Formeln (16) in Verbindung mit (19) keine zureichende Operatordarstellung mehr, weil der Radikand $\varrho^2 + \iota^2$ nach (22) bis auf ι_0 heruntergeht. Nun machen es die Existenz der klassischen Bewegungstypen und auch gewisse Analogien in Bargmanns Analyse der Lorentz-Transformation in drei Dimensionen sehr wahrscheinlich, daß Darstellungen auch für den Fall $I^2 + \varrho^2 > 0$ möglich sind. Wir müssen aber noch verlangen, daß einer oder wenige I- und ϱ-Werte darin *ausgezeichnet* sind, und das ist nicht so wahrscheinlich, weil sie kontinuierlich sein können. Aber vielleicht ist gerade eine gewisse *Breite* dieser Werte wesentlich für die endliche *Lebensdauer* der Teilchen, mit denen wir nachher zu tun haben werden, da die Energiequantelung sonst scharf herauskommt. Wir wollen also diese Möglichkeit einmal voraussetzen.

Danach läßt sich die Quantisierung mit Hilfe der WBK-Methode leicht zu Ende führen. Man muß bei ihrer Anwendung berücksichtigen, daß der Faktor von Ψ in (20) an den Endpunkten der Bewegung nicht Nullstellen, sondern *Pole* hat. Die Quantenbedingung folgt daher daraus, daß die Ψ-Funktion dort *Nullstellen* hat; sie bekommt zwei überzählige Nullstellen. Das hat zur Folge, daß man die Quantenzahl um zwei Einheiten erhöhen muß. Andererseits erscheint das Residuum $^1/_2$ wegen der verkehrten Potenz der Verzweigungspunkte mit umgekehrtem Vorzeichen. Die WBK-Bedingung lautet also, als Umlaufsintegral geschrieben,

$$\oint \sqrt{\frac{I^2 + \varrho^2 \cos^2 \Phi}{\eta^2 - \cos^2 \Phi}}\, d\Phi = \left(n + \frac{3}{2}\right) 2\pi\,, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{23}$$

Wir nehmen zunächst $I = 0$ an. In diesem Falle bekommt nach (20) die Ψ-Funktion eine Wendetangente im Symmetriepunkte $\Phi = \pi/2$; sie muß also *antisymmetrisch* sein. Im Integral ist dann natürlich $\cos \Phi$ absolut zu nehmen. Die Integration ist in diesem Falle ausführbar und liefert, wenn man gleich die Masse m nach (11) einführt und die Zählung von n mit 1 beginnen läßt:

$$m_n = m_0\, \mathfrak{Tang}\, \frac{2\pi}{\varrho} \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{8}\right). \tag{24}$$

Diese Formel gibt ausgezeichnet die Verteilung der drei Mesonenmassen wieder, die von Retallack[10] bei etwa $225 \pm 20\, m_e$ (m_e = Elektronenmasse), von Gardener und Lattes[11] bei $313 \pm 16\, m_e$ und von Lattes, Occhialini und Powell[12] bei $375 \pm 5\, m_e$ gefunden wurden. Wenn man auch ihre numerischen Werte durch (24) darstellen will, so hat es natürlich keinen Sinn, für ϱ und m_0 die bestgeeigneten zu wählen, sondern man muß nach Werten suchen, die als ein gruppentheoretischer Parameter und eine Elementarkonstante einige Wahrscheinlichkeit haben, und in der Tat gelingt die Darstellung gut mit

$$m_0 = 411\, m_e\,, \qquad \varrho = 2\pi\,. \tag{25}$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} m_1 &= 228\, m_e \\ m_2 &= 332\, m_e \\ m_3 &= 380\, m_e \\ &\vdots \\ m_\infty &= 411\, m_e \end{aligned}$$

Tab. 1.

Über den Wert von ϱ läßt sich nicht viel mehr sagen, als daß er groß genug ist, um die Verwendung der Formeln (16) und (19) zu rechtfertigen, und daß gruppentheoretisch vielleicht ein Wert

[10] J. G. Retallack, Physic. Rev. **72**, 742 [1947]; **73**, 532 [1948].

[11] E. Gardener u. C. M. G. Lattes, Science [New York] **107**, 270 [1948].

[12] C. M. G. Lattes, G. P. S. Occhialini u. C. F. Powell, Nature [London] **160**, 453, 486 [1947].

$\sqrt{4\pi^2 + 1/4}$ ausgezeichnet sein könnte; aber die Zahl $411 = 3 \cdot 137$ paßt vorzüglich hierher, denn sie ist gerade bis auf einen Faktor 2 das Verhältnis von $\hbar$ und der Konstanten der Strahlungskraft $\frac{2}{3}\frac{e^2}{c}$, die in allen vorangehenden Arbeiten des Verf. offen oder latent war, weil sich nur mit ihrer Hilfe die Strahlungskraft in eine reine *Quantenmechanik* einfügen läßt. Der Wert $I = 0$ ließe auf Bose-Statistik schließen.

Eine eingehendere Diskussion ist wohl im Augenblick wegen der Unsicherheit der Massenbestimmungen sowohl wie der vorliegenden Theorie nicht angebracht. Es sei nur erwähnt, daß wir auch einige Eigenwerte für $I = 1/2$ direkt aus der Differentialgleichung (20) bestimmt haben. In diesem Falle gibt es gerade und ungerade Eigenfunktionen. Das Ergebnis zeigt Tab. 2 in Vielfachen von m_e. Die theoretische Ungenauigkeit ist etwa 4%, hauptsächlich wegen der Unsicherheit der Operatordarstellung. Die beiden letzten Werte sind geschätzt.

gerade	ungerade
$m_1 = 184$	$m_2 = 225$
$m_3 = 318$	$m_4 = 332$
$m_5 \lesssim 380$	$m_6 = 380$.

Tab. 2.

Der erste Wert liegt sehr tief. Es wäre von Interesse, ob man diese Möglichkeit schon sicher ausschließen kann. Eine obere Grenze des diskreten Mesonenspektrums bei $411\, m_e$ kann wohl als recht wahrscheinlich gelten.

Feldmechanische Begründung der Diracschen Wellengleichung

Von Fritz Bopp

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität München

(Z. Naturforschg. **3a**, 564—573 [1948]; eingegangen am 31. Juli 1948)

Wenn man die Trägheitskraft des Elektrons aus einer verallgemeinerten linearen Elektrodynamik ableitet und dabei in der Entwicklung nach der Retardierung einen Schritt weiter geht als Lorentz, so erhält man eine Bewegungsgleichung, auf die m. W. Hönl und Papapetrou erstmalig hingewiesen haben. Darin wird zwischen dem Makroimpuls des Teilchens und seiner Mikrogeschwindigkeit unterschieden. Infolge von Emissions-Reabsorptionsprozessen verschiebt sich ständig der Energiemittelpunkt gegenüber dem Ladungsmittelpunkt, was zu einer Zitterbewegung führt, die ein spinartiges Zusatzmoment ergibt. Im folgenden wird gezeigt, daß dieses Zusatzmoment bei wohldefinierter Modifikation der Maxwellschen Gleichungen mit dem Elektronenspin identisch ist. Die Quantisierung der Bewegungsgleichung liefert in diesem Falle eine Wellengleichung, deren Lösungen auch die der Diracschen Wellengleichung enthalten. Die Diracsche Wellengleichung hängt also eng mit der Elektronenstruktur zusammen.

1. Entwicklung des Problems

Dirac[1] hat die Maxwellschen Potentiale für eine bewegte Punktladung in folgender Form dargestellt. Seien $(x_\alpha) = (\mathfrak{r}, ict)$ die Koordinaten des Aufpunktes und $[z_\alpha(s)] = [\mathfrak{r}_0(s), ic\, t_0(s)]$ mit $\dot{z}_\mu^2 = -c^2$ die der Bahnkurve einer Punktladung $+e$, dann lauten die retardierten Potentiale:

$$\varphi_\mu(x) = \frac{2e}{c^2} \int_{\text{ret}} \dot{z}_\mu(s)\, f(\sigma)\, ds. \tag{1}$$

Darin bedeutet σ das Quadrat des Abstandvektors $[x_\alpha - z_\alpha(s)]$:

$$\sigma = \frac{1}{c^2}(x_\alpha - z_\alpha(s))^2, \tag{2}$$

und die Integration (ret) ist über alle Punkte der Bahnkurve im Kegel vor x zu erstrecken. Für die Maxwellsche Theorie gilt speziell

$$f_M(\sigma) = \delta(\sigma). \tag{3}$$

Darin ist δ die Diracsche Punktfunktion.

Bekanntlich führt dieser Ansatz zu einer unendlichen Ruhmasse der Punktladung. Die ge-

[1] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **167**, 148 [1938]; M. H. L. Pryce, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **168**, 389 [1938].